

第四章、符号测度

§4.1 符号测度

- (X, \mathcal{F}) 是可测空间. 研究对象:

$$\varphi(A) := \int_A f d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

- 若 f 的积分存在, 则 φ 满足可列可加性.
- 定义4.1.1. 若 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 满足可列可加性且 $\varphi(\emptyset) = 0$, 则称 φ 为符号测度. 若 $|\varphi(A)| < \infty, \forall A \in \mathcal{F}$, 则称 φ 是有限的. 若 $\exists X$ 的划分 $\{A_n\}$ 使 $|\varphi(A_n)| < \infty, \forall n$, 则称 φ 是 σ 有限的.
- 注: φ 具有可加性.

命题 (命题4.1.1)

二择一:

或者 $\varphi(A) < \infty, \forall A \in \mathcal{F}$;

或者 $\varphi(A) > -\infty, \forall A \in \mathcal{F}$.

- 反证法: 若 $\exists A, B$ 使得 $\varphi(A) = \infty, \varphi(B) = -\infty$. 则

$$A \cup B = A + B \setminus A \Rightarrow \varphi(A \cup B) = \infty.$$

$$\text{同理, } A \cup B = B + A \setminus B \Rightarrow \varphi(A \cup B) = -\infty.$$

矛盾!

- 注: **约定** $\varphi(A) > -\infty, \forall A \in \mathcal{F}$.
- 注: 以下总假设 φ 是符号测度, 所有集合均 $\in \mathcal{F}$.

命题 (命题4.1.2)

若 $A \supseteq B$ 且 $|\varphi(A)| < \infty$, 则 $|\varphi(B)| < \infty$.

- $A = B + A \setminus B$.
- 若 $\varphi(B) = \infty$, 则 $\varphi(A) = \infty$.
若 $\varphi(B) = -\infty$, 则 $\varphi(A) = -\infty$.

命题 (命题4.1.3)

若 A_1, A_2, \dots 两两不交且 $|\varphi(\sum_{n=1}^{\infty} A_n)| < \infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(A_n)| < \infty.$$

- 令 $I = \{n : \varphi(A_n) > 0\}$, $J = \{n : \varphi(A_n) < 0\}$;

$$B = \sum_{n \in I} A_n, \quad C = \sum_{n \in J} A_n.$$

- $B, C \subseteq A$, 故 $0 \leq |\varphi(B)|, |\varphi(C)| < \infty$.
- $\sum_{n \in I} |\varphi(A_n)| = \varphi(B)$, $\sum_{n \in J} |\varphi(A_n)| = |\varphi(C)|$.
- 注: 若 $\varphi(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty$, 则 $\varphi(B) = \infty$, $-\infty < \varphi(C) \leq 0$.

§4.2 Hahn 分解和Jordan 分解

- 设 φ 是符号测度, 所有集合均 $\in \mathcal{F}$.
- 例, $\varphi(A) = \int_A f d\mu$.

$$\varphi(A) = \int_{A \cap \{f > 0\}} f d\mu + \int_{A \cap \{f < 0\}} f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu.$$

- 若 X 的分割 $\{X^+, X^-\}$ 满足:

$$\varphi(A) \geq 0, \forall A \subseteq X^+; \quad \varphi(A) \leq 0, \forall A \subseteq X^-,$$

则称 $\{X^+, X^-\}$ 为 φ 的Hahn 分解.

- 若 φ^+, φ^- 是测度且

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-,$$

则称该式为 φ 的Jordan 分解.

- 注: 若 μ, ν 为测度, 则 $\mu \pm \nu : A \mapsto \mu(A) \pm \nu(A)$.

- 目标: 找出 X^+ 与 X^- . 等价地, 找出 φ^+ .

$$\varphi(A \cap X^+) = \varphi^+(A).$$

- 记

$$\varphi^*(A) := \sup\{\varphi(B) : B \subseteq A\}.$$

- φ^* 非负、单调, $\varphi^*(\emptyset) = 0$.

引理 (引理4.2.1)

若 $\varphi(A) < \infty$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \subseteq A$ 使得

$$\varphi(A_\varepsilon) \geq 0 \text{ 且 } \varphi^*(A \setminus A_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

- 反证法: 若 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得

♠ : $\forall A_0 \subseteq A$, 或者 $\varphi(A_0) < 0$ 或者 $\varphi^*(A \setminus A_0) > \varepsilon_0$.

- 取 $A_0 = \emptyset$, 则 $\varphi^*(A) > \varepsilon_0$.
- 于是 $\exists B_1 \subseteq A$ 使 $\varphi(B_1) > \varepsilon_0$, 由♠ 知 $\varphi^*(A - B_1) > \varepsilon_0$.
- 于是 $\exists B_2 \subseteq A - B_1 \subseteq A$ 使 $\varphi(B_2) > \varepsilon_0$.
- $\varphi(B_1 + B_2) > 0$, 由♠ 知 $\varphi^*(A - (B_1 + B_2)) > \varepsilon_0 \dots\dots$
- 令 $B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$, 则 $\varphi(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n) = \infty \Rightarrow \varphi(A) = \infty$.

引理 (引理4.2.2)

设 $\varphi(A) < 0$, 则 $\exists A_0 \subseteq A$ 使得

$$\varphi(A_0) < 0 \text{ 且 } \varphi^*(A_0) = 0.$$

- 由引理4.2.1, $\exists C_1 \subseteq A$ 使 $\varphi(C_1) \geq 0$ 且 $\varphi^*(A \setminus C_1) \leq \varepsilon_1 := 1$.
- 令 $A_1 := A - C_1$, 则 $\varphi(A_1) < 0$, $\varphi^*(A_1) \leq \varepsilon_1 = 1$.
- ******, $A_1 = A_2 + C_2$, $\varphi(C_2) \geq 0$ 且 $\varphi^*(A_2) \leq \varepsilon_2 := \frac{1}{2}$. \dots
- 令 $C := \sum_{n=1}^{\infty} C_n$. $A_0 = A - C = \downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.
- $\varphi(A_0) < 0$:

$$\varphi(A) < 0, \quad \varphi(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(C_n) \geq 0.$$

- $\varphi^*(A_0) = 0$:

$$0 \leq \varphi^*(A_0) \leq \varphi^*(A_n) \leq \varepsilon_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

定理 (定理4.2.3, Hahn 分解)

Hahn分解存在**唯一**:

$$\varphi(A) = 0, \forall A \subseteq X_1^+ \Delta X_2^+ = X_1^- \Delta X_2^- = X_1^+ X_2^- + X_1^- X_2^+.$$

- (1) 往证 $\mathcal{F}^- := \{A : \varphi^*(A) = 0\}$ 是 σ 环.
- (1.a) \mathcal{F}^- 非空: $\emptyset \in \mathcal{F}^-$;
- (1.b) 若 $A_1, A_2 \in \mathcal{F}^-$, 则 $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{F}^-$:

$$0 \leq \varphi^*(A_1 \setminus A_2) \leq \varphi^*(A_1) = 0.$$

- (1.c) 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}^-$ 两两不交, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}^-$:

$$\varphi(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B \cap A_n) \leq 0, \quad \forall B \subseteq \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

- (2) 往证Hahn 分解存在: $\exists X^\pm$ 使得

$$X^+ + X^- = X, \quad \varphi(AX^+) \geq 0 \geq \varphi(AX^-), \quad \forall A.$$

- 不妨设(约定) $\varphi(A) > -\infty, \forall A$.

记 $\alpha := \inf\{\varphi(A) : A \in \mathcal{F}^-\}$. $\emptyset \in \mathcal{F}^- \Rightarrow \alpha \leq 0$.

- 取 $\{A_n\} \in \mathcal{F}^-$ 使 $\varphi(A_n) \rightarrow \alpha$. 则 $X^- := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}^-$.
- $\alpha = \varphi(X^-) > -\infty$: $X^- \setminus A_n \in \mathcal{F}^-$,

$$\begin{aligned} \varphi(X^-) &= \varphi(A_n) + \varphi(X^- \setminus A_n) \\ &\leq \varphi(A_n) + \varphi^*(X^- \setminus A_n) = \varphi(A_n) \rightarrow \alpha. \end{aligned}$$

- $\forall A, \varphi(AX^-) \leq \varphi^*(AX^-) \leq \varphi^*(X^-) = 0$.
- 令 $X^+ = X - X^-$. 往证 $\varphi(AX^+) \geq 0, \forall A$.

- 令 $X^+ = X - X^-$. 往证 $\varphi(A X^+) \geq 0, \forall A$.

反证法: 假设 $\exists A \subseteq X^+$ 使 $\varphi(A) < 0$.

- $\exists A_0 \subseteq A$ 使 $\varphi(A_0) < 0$, 且 $\varphi^*(A_0) = 0$, i.e. $A_0 \in \mathcal{F}^-$.

- $A_0 + X^- \in \mathcal{F}^-$, 且

$$\varphi(A_0 + X^-) = \varphi(A_0) + \varphi(X^-) < \alpha.$$

与 α 的定义矛盾!

• (3) 往证惟一性. 设 X_1^\pm 与 X_2^\pm 都是Hahn 分解.

• $A \subseteq X_1^+ \Delta X_2^+ = X_1^+ \cap X_2^- + X_2^+ \cap X_1^-$.

• $A_1 = A \cap \star$, 则

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \subseteq X_1^+ \Rightarrow \varphi(A_1) \geq 0 \\ A_1 \subseteq X_2^- \Rightarrow \varphi(A_1) \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(A_1) = 0.$$

• 同理, $\varphi(A \cap \star) = 0$. 从而

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap \star) + \varphi(A \cap \star) = 0.$$

定理 (定理4.2.4, Jordan 分解)

Jordan分解存在**唯一**:

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-, \quad \text{且 } \varphi^+ = \varphi^*, \varphi^- = (-\varphi)^*.$$

- φ^\pm 都是测度, 且不妨设(约定) φ^- 有限:

$$\varphi^+(A) = \varphi(A \cap X^+), \quad \varphi^-(A) := -\varphi(A \cap X^-).$$

- $\varphi(A) = \varphi(A \cap X^+) + \varphi(A \cap X^-) = \varphi^+(A) - \varphi^-(A).$
- $\varphi^* \leq \varphi^+ : \forall B \subseteq A, \varphi(B) \leq \varphi^+(B) \leq \varphi^+(A).$
- $\varphi^+ \leq \varphi^* : A \cap X^+ \subseteq A.$
- $(-\varphi)^* \leq \varphi^- : \forall B \subseteq A, -\varphi(B) \leq \varphi^-(B) \leq \varphi^-(A).$
- $\varphi^- \leq (-\varphi)^* : A \cap X^- \subseteq A.$

- 注: $\varphi = \mu - \nu$ 分解不惟一, 例: $\mu = \varphi^+ + \phi, \nu = \varphi^- + \phi$.
- 注: φ^\pm 的支撑不交. 若 $\phi \neq 0$ 则 $\varphi^\pm + \phi$ 的支撑相交:
- φ 的上变差: φ^+ ; 下变差: φ^- .
- φ 的全变差: $|\varphi| := \varphi^+ + \varphi^-$.
- **引理***: $|\varphi|(A) = 0$ iff $\varphi(B) = 0, \forall B \subseteq A$.
- \Rightarrow :

$$|\varphi|(A) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi^\pm(A) = 0 \\ |\varphi|(B) = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi^\pm(B) = 0 \Rightarrow \varphi(B) = 0.$$
- \Leftarrow : 记 φ 的Hahn 分解为 X^\pm , 则

$$\varphi(X^\pm \cap A) = 0 \Rightarrow \varphi^\pm(A) = 0 \Rightarrow |\varphi|(A) = 0.$$

- 注: $|\varphi(A)| \leq |\varphi|(A)$. 仅当 $|\varphi|(A) = 0$ 时, A 才可以被忽略.

§4.3 Radon-Nikodym 定理

- (X, \mathcal{F}) 是可测空间, μ 是测度, φ 是符号测度.
以下事件、函数均可测.

- 定义4.3.1. 若存在a.e. 下唯一的可测函数 f 使得

$$\varphi(A) = \int_A f d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

则称 f 为 φ 对于 μ 的Radon-Nikodym 导数,
简称R-N 导数或导数, 记为 $\frac{d\varphi}{d\mu}$.

- 定义4.3.2. 若 $\forall A \in \mathcal{F}$,

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0,$$

则称 φ 对 μ 绝对连续, 记作 $\varphi \ll \mu$.

- 注: $\varphi \ll \mu$ iff $\varphi^\pm \ll \mu$ iff $|\varphi| \ll \mu$.

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A \cap X^\pm) \Rightarrow \varphi^\pm(A) = \varphi(A \cap X^\pm) = 0.$$

- 往证: 若 μ 是 σ 有限的且 $\varphi \ll \mu$, 则 $\frac{d\varphi}{d\mu}$ 存在.

命题4.3.2

φ 有限
 μ 有限

→ 命题4.3.3

φ σ 有限

→ 命题4.3.4

φ 任意

→ 定理4.3.5

μ σ 有限.

引理 (引理4.3.1)

设 φ, μ 都是有限测度. 则

$$\exists f \in \mathcal{L} := \left\{ g \in L_1 : g \geq 0, \int_A g d\mu \leq \varphi(A), \forall A \right\}$$

使得 $\int_X f d\mu = \beta := \sup \left\{ \int_X g d\mu : g \in \mathcal{L} \right\}$.

- 注: 因为 φ 有限, 所以 $\beta \leq \varphi(X) < \infty$.
- 取 $g_1, g_2, \dots \in \mathcal{L}$ 使 $\int_X g_k d\mu \rightarrow \beta$. 令

$$f_n := \max_{1 \leq k \leq n} g_k.$$

- $f_n \uparrow f := \sup_{k \geq 1} g_k$, 则

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \beta.$$

- $B_{n,1} = \{f_n = g_1\}$,

$$B_{n,k} = \{f_n = g_k > \max\{g_1, \dots, g_{k-1}\}\} = \{f_n = g_k\} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \{f_n = g_i\}.$$

- $f \in \mathcal{L}$: $f \geq 0$, 且

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &\leftarrow \int_A f_n d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{A \cap B_{n,k}} f_n d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{A \cap B_{n,k}} g_k d\mu \\ &\leq \sum_{k=1}^n \varphi(A \cap B_{n,k}) = \varphi(A). \end{aligned}$$

命题 (命题4.3.2)

设 φ, μ 都是有限测度. 若 $\varphi \ll \mu$, 则 $\frac{d\varphi}{d\mu}$ 存在, 且 $\in L_1$.

- $f \in \mathcal{L} \Rightarrow \nu$ 是测度. 往证 $\nu \equiv 0$.

$$\nu(A) := \varphi(A) - \int_A f d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

- ν_n 是(↑的)符号测度.

$$\nu_n(A) := \nu(A) - \frac{1}{n}\mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

- 记 ν_n 的Hahn分解为 X_n^\pm . 往证 $\nu(X^\pm) = 0$, 其中

$$X^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^+, \quad X^- = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n^-.$$

- $\nu(X^-) = 0$: $X^- \subseteq X_n^-$, 故

$$0 \leq \nu(X^-) = \nu_n(X^-) + \frac{1}{n}\mu(X^-) \leq \frac{1}{n}\mu(X^-) \rightarrow 0.$$

- $f + \frac{1}{n}\mathbf{I}_{X_n^+} \in \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \int_A \left(f + \frac{1}{n}\mathbf{I}_{X_n^+} \right) d\mu &= \varphi(A) - \nu(A) + \frac{1}{n}\mu(X_n^+ \cap A) \\ &\leq \varphi(A) - \nu(X_n^+ \cap A) + \frac{1}{n}\mu(X_n^+ \cap A) \\ &= \varphi(A) - \nu_n(X_n^+ \cap A) \leq \varphi(A). \end{aligned}$$

- $\mu(X^+) = 0$:

$$\int_X \left(f + \frac{1}{n}\mathbf{I}_{X_n^+} \right) d\mu \leq \beta = \int_X f d\mu \Rightarrow \mu(X_n^+) = 0, \forall n.$$

- $\varphi \ll \mu \Rightarrow \varphi(X^+) = 0$, 故 $\nu(X^+) = 0$.
- $\int_X |f| d\mu = \int_X f d\mu = \varphi(X) < \infty$, 故 $\frac{d\varphi}{d\mu} \in L_1$.

命题 (命题4.3.3)

设 φ 是 σ 有限的符号测度, μ 是有限测度.若 $\varphi \ll \mu$,则 $\frac{d\varphi}{d\mu}$ 存在, $\frac{d\varphi}{d\mu}$ 是 μ -a.e.有限的,且积分存在.

- 设 φ 有限.则 φ^\pm 均为有限测度,且 $\varphi^\pm \ll \mu$.于是 $\frac{d\varphi^\pm}{d\mu}$ 存在.
- $\frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{d\varphi^+}{d\mu} - \frac{d\varphi^-}{d\mu}$:

$$\varphi(A) = \varphi^+(A) - \varphi^-(A) = \int_A \frac{d\varphi^+}{d\mu} d\mu - \int_A \frac{d\varphi^-}{d\mu} d\mu.$$

- 假设命题成立.记 φ 的Hahn分解 X^\pm ,则

$$\frac{d\varphi^+}{d\mu} \Big|_{X^-} = 0, \quad \frac{d\varphi^-}{d\mu} \Big|_{X^+} = 0 \Rightarrow \left(\frac{d\varphi}{d\mu} \right)^\pm = \frac{d\varphi^\pm}{d\mu}.$$

- 设 φ 是 σ 有限的. $X = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 且 $|\varphi(A_n)| < \infty, \forall n \geq 1$.
- 在 $(A_n, A_n \cap \mathcal{F})$ 上, R-N 导数 f_n 存在且a.e. 有限.

$$f_n := \frac{d\varphi|_{A_n \cap \mathcal{F}}}{d\mu|_{A_n \cap \mathcal{F}}}, \quad \text{即 } \varphi(A) = \int_A f_n d\mu, \quad \forall A \subseteq A_n.$$

- 令 $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathbf{I}_{A_n}$, 则 f a.e. 有限.

$$\varphi(A \cap A_n) = \int_{A \cap A_n} f_n d\mu = \int_{A \cap A_n} f d\mu, \quad \forall A.$$

- f 的积分存在: 不妨设 φ^- 有限, 取 $A = \{f < 0\}$, 则

$$\varphi(\{f < 0\} \cap A_n) = - \int_{A_n} f^- d\mu \Rightarrow \int_X f^- d\mu = -\varphi(f < 0) < \infty.$$

- 故 $\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap A_n} f d\mu = \int_A f d\mu$.

命题 (命题4.3.4)

设 φ 是符号测度, μ 是有限测度. 若 $\varphi \ll \mu$, 则 $\frac{d\varphi}{d\mu}$ 及其积分存在.
又若 φ 是 σ 有限的, 则 f 是 μ -a.e. 有限的.

- (1) 往证 \mathcal{G} 是 σ 环.

$$\mathcal{G} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n : |\varphi(A_n)| < \infty, n = 1, 2, \dots \right\}.$$

- $\emptyset \in \mathcal{G}$; 不交并封闭; 差封闭:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus B_n)$$

其中, $A_n \setminus B \subseteq A_n$ 故 $|\varphi(A_n \setminus B)| < \infty$.

- (2) $\exists B \in \mathcal{G}$ 使得 $\mu(B) = \gamma := \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{G}\}$.

取 $B_n \in \mathcal{G}, \mu(B_n) \rightarrow \gamma \in [0, \infty), B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}$ 即可.

- (3) 在 $(B, B \cap \mathcal{F})$ 上, φ 是 σ 有限的, μ 有限.

故R-N 导数 $g = \frac{d\varphi|_{B \cap \mathcal{F}}}{d\mu|_{B \cap \mathcal{F}}}$ 存在, 是 μ -a.e. 有限的, :

$$\varphi(C) = \int_C g d\mu, \quad \forall C \subseteq B. \quad \text{不妨设(按约定)} \int_B g^- d\mu < \infty.$$

- (4) 在 $(B^c, B^c \cap \mathcal{F})$ 上, $\forall C \subseteq B^c,$

$$\mu(C) = 0 \Rightarrow \varphi(C) = 0; \quad (\varphi \ll \mu)$$

$$\mu(C) > 0 \Rightarrow \varphi(C) = \infty. \quad (\text{否则 } B + C \in \mathcal{G} \text{ 与 } * \& * \text{ 矛盾})$$

于是, $\varphi(C) = \int_C \infty d\mu, \quad \forall C \subseteq B^c.$

- (5) 令 $f = g\mathbf{I}_B + \infty\mathbf{I}_{B^c}$, 则 f 的积分存在:

$$\int_X f^- d\mu = \int_B g^- d\mu < \infty.$$

- $\forall A$,

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= \varphi(A \cap B) + \varphi(A \cap B^c) = \int_{A \cap B} g d\mu + \int_{A \cap B^c} \infty d\mu \\ &= \int_{A \cap B} f d\mu + \int_{A \cap B^c} f d\mu = \int_A f d\mu.\end{aligned}$$

- 当 φ 是 σ 有限时, $X \in \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} = \mathcal{F} \Rightarrow$ 可取 $B = X$, 故

$$f \stackrel{\text{a.e.}}{=} g, \quad \text{a.e.有限.}$$

定理 (定理4.3.5)

设 φ 是符号测度, μ 是 σ 有限的测度. 若 $\varphi \ll \mu$, 则 $\frac{d\varphi}{d\mu}$ 及其积分存在. 又若 φ 是 σ 有限的, 则 f 是 μ -a.e. 有限的.

- 取 $\{A_n\}$ 使得 $X = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 且 $\mu(A_n) < \infty, \forall n$.
- 在 $(A_n, A_n \cap \mathcal{F})$ 上, R-N 导数 $f_n := \frac{d\varphi|_{A_n \cap \mathcal{F}}}{d\mu|_{A_n \cap \mathcal{F}}}$ 存在:

$$\varphi(A) = \int_A f_n d\mu, \quad \forall A \subseteq A_n.$$

- 不妨设(按约定) $\varphi(A) > -\infty, \forall A$. 故

$$\int_A f_n^- d\mu < \infty, \quad \forall n.$$

- 令 $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathbf{I}_{A_n}$. 则 f 积分存在:

$$\begin{aligned} \int_X f^- d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f^- d\mu = - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n \cap \{f < 0\}} f d\mu \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n \cap \{f < 0\}} f_n d\mu = - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n \cap \{f < 0\}) \\ &= -\varphi(f < 0) < \infty. \quad (\text{由不妨设/约定}) \end{aligned}$$

- $\forall A$,

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap A_n} f d\mu = \int_A f d\mu.$$

- 当 φ 是 σ 有限时, 在 A_n 中 f_n 是 μ -a.e. 有限的, 故 f 是 μ -a.e. 有限的.

例1(μ 不是 σ 有限的). $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : A \text{ 或 } A^c \text{ 至多可数}\}$.

- 令

$$\mu(A) = \begin{cases} \#(A), & \#(A) < \infty, \\ \infty, & \#(A) = \infty. \end{cases}$$

则 μ 不是 σ 有限的!

- 令

$$\varphi(A) = \begin{cases} 0, & \text{若 } A \text{ 至多可数,} \\ 1, & \text{若 } A^c \text{ 至多可数.} \end{cases}$$

- $\varphi \ll \mu$:

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow \varphi(A) = 0.$$

- $f = \frac{d\varphi}{d\mu}$ 不存在. 否则

$$0 = \varphi(\{x\}) = \int_{\{x\}} f d\mu = f(x) \cdot \mu(\{x\}) = f(x), \quad \forall x \Rightarrow f \equiv 0.$$

§4.4 Lebesgue 分解

- 设 (X, \mathcal{F}) 是可测空间, φ, ϕ 都是符号测度.

以下事件、函数均可测.

- 若 $\varphi \ll |\phi| = \phi^+ + \phi^-$, 则称 φ 对 ϕ 绝对连续, 记作 $\varphi \ll \phi$.

- 注: $\varphi \ll \phi$ iff $|\varphi| \ll |\phi|$.

- 证: $\Rightarrow: \varphi \ll |\phi| \Rightarrow |\varphi| \ll |\phi|, \checkmark$.

$$\Leftarrow: |\phi|(A) = 0 \Rightarrow |\varphi|(A) = 0 \Rightarrow |\varphi(A)| \leq 0.$$

- 定义4.4.1. 若 $\exists N \in \mathcal{F}$ 使得

$$|\varphi|(N^c) = |\phi|(N) = 0,$$

则称 φ 与 ϕ 相互奇异, 记为 $\varphi \perp \phi$.

- 引理4.4.1. $\varphi \perp \phi$ 当且仅当 $\exists N \in \mathcal{F}$ 使得

$$\varphi(A \cap N^c) = \phi(A \cap N) = 0, \quad \forall A.$$

- 证: 由§4.2 “引理*: $|\varphi|(A) = 0$ iff $\varphi(B) = 0, \forall B \subseteq A$ ”, \checkmark .
- 引理4.4.2. 若 $\varphi \ll \phi$ 且 $\varphi \perp \phi$, 则 $\varphi \equiv 0$.
- 证: 取 $N \in \mathcal{F}$ 使得 $\star\star$. 于是, $|\varphi|(N) = 0$. 故 $|\varphi|(X) = 0$.

- Lebesgue 分解: φ, ϕ 都是 σ 有限的符号测度, 则存在(唯一的一组) σ 有限的符号测度 φ_c, φ_s 使得

$$\varphi = \varphi_c + \varphi_s; \quad \varphi_c \ll \phi; \quad \varphi_s \perp \phi.$$

- 唯一性的证明: 对任意满足 $|\phi|(N) = |\varphi_s|(N^c) = 0$ 的 N ,

$$\varphi_c(A) = \varphi_c(AN) + \varphi_c(AN^c) = \varphi_c(AN^c) = \varphi(AN^c); \quad \varphi_s(A) = \varphi(AN).$$

若有两种分解, 取 $N = N_1 \cup N_2$ 即可.

- 证明顺序:

命题4.4.3

命题4.4.4

定理4.4.5

推论4.4.6

$\varphi : \text{f.m.}$

\rightarrow

$\sigma \text{ f.m.}$

\rightarrow

$\sigma \text{ f.s.m.}$

$\mu : \text{f.m.}$

\rightarrow

$\sigma \text{ f.m.}$

\rightarrow

$\sigma \text{ f.s.m.}$

命题 (命题4.4.3)

设 φ, μ 都是有限的测度, 则存在有限测度 φ_c, φ_s 使得:

$$\varphi = \varphi_c + \varphi_s; \quad \varphi_c \ll \mu; \quad \varphi_s \perp \mu.$$

- $\varphi \ll \varphi + \mu$, 故 $f := \frac{d\varphi}{d(\varphi+\mu)}$ 存在, 且 $0 \leq f \leq 1$, (μ -a.e.):

$$0 \leq \int_A f d(\varphi + \mu) = \varphi(A) \leq (\varphi + \mu)(A) = \int_A \mathbf{1} d(\varphi + \mu), \quad \forall A.$$

- ******: 令 $N = \{f = 1\}$,

$$\varphi_c(A) := \varphi(A \cap N^c); \quad \varphi_s(A) := \varphi(A \cap N).$$

- 注: φ_s 由 N 支撑, φ_c (往证: 与 μ) 由 $N^c = \{0 \leq f < 1\}$ 支撑.

- $N = \{f = \frac{d\varphi}{d(\varphi+\mu)} = 1\}$, $N^c = \{0 \leq f < 1\}$,

$$\varphi_c(A) := \varphi(A \cap N^c); \quad \varphi_s(A) := \varphi(A \cap N).$$

- $\varphi_s \perp \mu$: $\varphi_s(N^c) = 0$; 且 $\mu(N) = 0$:

$$\varphi(N) = \int_N f d(\varphi + \mu) = \int_N 1 d(\varphi + \mu) = \varphi(N) + \mu(N).$$

- $\varphi_c \ll \mu$: 若 $\mu(A) = 0$, 则

$$\int_{AN^c} (1-f) d(\varphi+\mu) = \mu(AN^c) = 0 \Rightarrow \varphi_c(A) \leq (\varphi+\mu)(AN^c) = 0.$$

命题 (命题4.4.4)

设 φ, μ 都是 σ 有限的测度, 则存在 σ 有限的测度 φ_c, φ_s 使得:

$$\varphi = \varphi_c + \varphi_s; \quad \varphi_c \ll \mu; \quad \varphi_s \perp \mu.$$

定理 (定理4.4.5, Lebesgue 分解)

设 φ 是 σ 有限的符号测度, μ 是 σ 有限的测度.

则存在**唯一的一对** σ 有限的符号测度 φ_c, φ_s 使得 \star .

推论 (推论4.4.6)

设 φ, ϕ 都是 σ 有限的符号测度, 则存在**唯一的一对** σ 有限的符号测度 φ_c, φ_s 使得 \star .

例. 分布与随机变量的分布.

- 设 μ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 上的概率分布, λ 是Lebesgue 测度.
- 若 $\mu \ll \lambda$, 则称 μ 为连续型, 称 $\frac{d\mu}{d\lambda}$ 为 μ 的(概率分布)密度.
- 若 $\mu(\{x\}) > 0$, 则称 x 为 μ 的原子. μ 有限 $\Rightarrow D$ 可数,

$$D = D_{\mu} := \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}, \quad \text{记 } D = \{x_n, n \geq 1\}.$$

- 若 $\mu(D) = 1$, 则称 μ 为离散型, 记 $p_n = \mu(\{x_n\}), \forall n$.
称 $\{(x_n, p_n), n \geq 1\}$ 为 μ 的(概率)分布列.
- 若 $\mu \perp \lambda$ 且 $\mu(\{x\}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 则称 μ 为奇异型.

- μ 是有限测度, λ 是 σ 有限的测度.
- μ 关于 λ 的Lebesgue 分解:

$$\mu = \mu_c + \mu_s; \quad \mu_1 := \mu_c \ll \lambda; \quad \mu_s \perp \lambda.$$

- μ 的所有原子组成可数集 D . 令

$$\mu_2(A) := \mu_s(A \cap D), \quad \mu_3 := \mu_s - \mu_2.$$

- 令 $\alpha_i := \mu_i(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, 3$. 则

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1.$$

- 若 $\alpha_i = 1$, 则 $\mu = \mu_i$. 此时 μ 为连续型/离散型/奇异型.
- 若 $\alpha_i > 0$, 则可将 μ_i 归一化为分布, $\tilde{\mu}_i := \frac{1}{\alpha_i} \mu_i$.
- 若 $\alpha_i = 0$, 则任取一个同类型分布作为 $\tilde{\mu}_i$.
- 存在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 连续型分布 $\tilde{\mu}_1$, 离散型分布 $\tilde{\mu}_2$, 奇异型分布 $\tilde{\mu}_3$ 使得: ** 且

$$\mu = \alpha_1 \tilde{\mu}_1 + \alpha_2 \tilde{\mu}_2 + \alpha_3 \tilde{\mu}_3.$$

- 设 (X, \mathcal{F}, P) 为概率空间, ξ 为随机变量.
- ξ 的分布: $\mu = \mu_\xi = P \circ \xi^{-1}$.
- 若 $\alpha_1 = 1$, 则 μ_ξ 为连续型, 此时称 ξ 为连续型r.v., 称 μ_ξ 的密度 $\frac{d\mu_\xi}{d\lambda}$ 为 ξ 的(概率分布)密度.
- 若 $\alpha_2 = 1$, 则 μ_ξ 为离散型, 此时称 ξ 为离散型r.v., 称 μ_ξ 的分布列为 ξ 的分布列.
- 若 $\alpha_3 = 1$, 则 μ_ξ 为奇异型, 此时称 ξ 为奇异型r.v..

- 连续型r.v. 函数的期望:

$\xi : (X, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}), g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \leftarrow$, 则

$$\begin{aligned} \mathbb{E}g(\xi) &= \int_X g \circ \xi dP = \int_{\mathbb{R}} g d\mu_{\xi} = \int_{\mathbb{R}} g \frac{d\mu_{\xi}}{d\lambda} d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} g \cdot p_{\xi} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_{\xi}(x) dx. \end{aligned}$$

§4.5 条件期望和条件概率

- 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是概率空间.
- 设 \mathcal{G} 是 \mathcal{F} 的子 σ 代数:

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \quad \text{且} \mathcal{G} \text{ 是} \sigma \text{ 代数.}$$

- 以下, 事件、函数都关于 \mathcal{F} 可测, 集合系都是 \mathcal{F} 的子 σ 代数.

条件期望的定义

- 定义4.5.1. 假设 f 的积分存在. 称满足下列(1), (2)的 f^* 为 f 关于 \mathcal{G} 的条件期望, 记为 $E(f|\mathcal{G})$.
 - (1) f^* 是 (Ω, \mathcal{G}, P) 上积分存在的可测函数;
 - (2) $\forall A \in \mathcal{G}$,

$$E f^* \mathbf{I}_A = E f \mathbf{I}_A, \quad \text{即} \quad \int_A f^* dP = \int_A f dP.$$

- 注: $E(f|\mathcal{G})$ 存在, 指一族在 (Ω, \mathcal{G}, P) 中a.s. 相等的r.v..

条件期望的性质

- 设 $\{A_t, t \in T\} \subseteq \mathcal{F}$. 若 $\forall n \geq 2, \{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T$,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_{t_k}\right) = \prod_{k=1}^n P(A_{t_k}),$$

则称 $\{A_t, t \in T\}$ 相互独立.

- 设 $\mathcal{E}_t \subseteq \mathcal{F}, \forall t \in T$. 若任取 $A_t \in \mathcal{E}_t, t \in T$, 总有 $\{A_t, t \in T\}$ 相互独立, 则称 $\{\mathcal{E}_t, t \in T\}$ 相互独立.
- 设 $\{f_t, t \in T\}$ 是随机变量族. 若 $\{\sigma(f_t), t \in T\}$ 相互独立, 则称 $\{f_t, t \in T\}$ 相互独立.
- 引理4.5.1. 设 f 是积分存在的r.v.. 若 f 与 \mathcal{E} 相互独立(即, $\sigma(f)$ 与 \mathcal{E} 相互独立), 则

$$E(f\mathbf{I}_A) = (Ef) \cdot P(A).$$

定理 (定理4.5.2)

设 f, g 是积分存在的 r.v., $\mathcal{G}, \mathcal{G}_0$ 是 \mathcal{F} 的子 σ 代数.

(1) (可测性) 若 $f \in \mathcal{G}$, 则 $E(f|\mathcal{G}) \stackrel{\text{a.s.}}{=} f$. Esp, $E(a|\mathcal{G}) \stackrel{\text{a.s.}}{=} a$.

(2) (独立性) 若 f 与 \mathcal{G} 独立, 则 $E(f|\mathcal{G}) \stackrel{\text{a.s.}}{=} Ef$.

Esp, 可取 $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$.

(3) (重条件期望公式) 若 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_0$, 则

$$E(E(f|\mathcal{G})|\mathcal{G}_0) \stackrel{\text{a.s.}}{=} E(f|\mathcal{G}) \stackrel{\text{a.s.}}{=} E(E(f|\mathcal{G}_0)|\mathcal{G}).$$

(4) (单调性) 若 $f \stackrel{\text{a.s.}}{\leq} g$, 则 $E(f|\mathcal{G}) \leq E(g|\mathcal{G})$. Esp, $g = |f|$.

(5) (线性) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 若 $aEf + bEg$ 有意义, 则

$$E(af + bg|\mathcal{G}) \stackrel{\text{a.s.}}{=} aE(f|\mathcal{G}) + bE(g|\mathcal{G}).$$

定理 (定理4.5.2)

设 f, g 是积分存在的 r.v., $\mathcal{G}, \mathcal{G}_0$ 是 \mathcal{F} 的子 σ 代数.

(1) (可测性) 若 $f \in \mathcal{G}$, 则 $E(f|\mathcal{G}) \stackrel{\text{a.s.}}{=} f$. Esp, $E(a|\mathcal{G}) \stackrel{\text{a.s.}}{=} a$.

(2) (独立性) 若 f 与 \mathcal{G} 独立, 则 $E(f|\mathcal{G}) \stackrel{\text{a.s.}}{=} Ef$. Esp, $\{\emptyset, \Omega\}$.

- (1) 可测性: \checkmark . $f^* := f \in \mathcal{G}$.

强调: a.s. 提及的零测集 $\in \mathcal{G}$.

- (2) 独立性: $f^* := Ef \in \mathcal{G}$, 且 $\forall A \in \mathcal{G}$,

$$Ef \mathbf{I}_A = (Ef)P(A) = Ef^* \mathbf{I}_A.$$

- 特别地, f 与 $\{\emptyset, \Omega\}$ 独立, 故

$$E(f|\{\emptyset, \Omega\}) \stackrel{\text{a.s.}}{=} Ef.$$

定理 (定理4.5.2)

设 f, g 是积分存在的 r.v., $\mathcal{G}, \mathcal{G}_0$ 是 \mathcal{F} 的子 σ 代数.

(3) (重条件期望公式) 若 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_0$, 则

$$E(E(f|\mathcal{G})|\mathcal{G}_0) \stackrel{\text{a.s.}}{=} E(f|\mathcal{G}) \stackrel{\text{a.s.}}{=} E(E(f|\mathcal{G}_0)|\mathcal{G}).$$

- (3) 重条件期望公式: 记 $f^* := E(f|\mathcal{G})$, 则 $f^* \in \mathcal{G}$.
- 一方面,

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_0 \Rightarrow f^* \in \mathcal{G}_0 \Rightarrow E(f^*|\mathcal{G}_0) \stackrel{\text{a.s.}}{=} f^*;$$

- 另一方面, 记 $\hat{f} := E(f|\mathcal{G}_0)$, 则 $\forall A \in \mathcal{G}$,

$$E f^* \mathbf{I}_A = E f \mathbf{I}_A \stackrel{A \in \mathcal{G}_0}{=} E \hat{f} \mathbf{I}_A,$$

故 $f^* = E(\hat{f}|\mathcal{G})$.

定理 (定理4.5.2)

设 f, g 是积分存在的 r.v., $\mathcal{G}, \mathcal{G}_0$ 是 \mathcal{F} 的子 σ 代数.

(4) (单调性) 若 $f \stackrel{\text{a.s.}}{\leq} g$, 则 $E(f|\mathcal{G}) \stackrel{\text{a.s.}}{\leq} E(g|\mathcal{G})$. Esp, $g = |f|$.

- (4) 单调性: $\forall A \in \mathcal{G}$,

$$E f^* \mathbf{I}_A = E f \mathbf{I}_A \leq E g \mathbf{I}_A = E g^* \mathbf{I}_A.$$

P 是 σ 有限的(概率测度), 故 $f^* \leq g^*$ (在 (Ω, \mathcal{G}, P) 中) a.s..

(习题三、4)

定理 (定理4.5.2)

设 f, g 是积分存在的 r.v., $\mathcal{G}, \mathcal{G}_0$ 是 \mathcal{F} 的子 σ 代数.

(5) (线性) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 若 $aEf + bEg$ 有意义, 则

$$E(af + bg|\mathcal{G}) \stackrel{\text{a.s.}}{=} aE(f|\mathcal{G}) + bE(g|\mathcal{G}).$$

- (5) 线性: 若 \star 有意义, 则 $h = af + bg$ (a.s.有意义且)积分存在, 故 $h^* := E(af + bg|\mathcal{G})$ 存在.
- 记 $f^* := E(f|\mathcal{G})$, $g^* := E(g|\mathcal{G})$, 则 $aEf^* + bEg^* = aEf + bEg$ 有意义, 故 $\hat{h} := af^* + bg^*$ (a.s.有意义且)积分存在.
- $\hat{h} = h^*$ a.s.: $\hat{h} \in \mathcal{G}$, 且 $\forall A \in \mathcal{G}$,

$$E\hat{h}\mathbf{I}_A = aEf^*\mathbf{I}_A + bEg^*\mathbf{I}_A = aEf\mathbf{I}_A + bEg\mathbf{I}_A = Eh\mathbf{I}_A.$$

- 归纳: $Ef + Eg + Eh$ 有意义 $\Rightarrow (f + g + h)^* \stackrel{\text{a.s.}}{=} f^* + g^* + h^*$.

定理 (定理4.5.3)

设 f, f_1, f_2, \dots 是积分存在的r.v., \mathcal{G} 是 \mathcal{F} 的子 σ 代数.

(1) (Levi 定理、单调收敛定理) 若 $0 \leq f_n \uparrow f$ a.s., 则

$$0 \leq E(f_n | \mathcal{G}) \uparrow E(f | \mathcal{G}) \text{ a.s.};$$

(2) (Fatou 引理) 若 $f_n \geq 0$ a.s., 则

$$E\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n | \mathcal{G}\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(f_n | \mathcal{G}) \text{ a.s.};$$

(3) (Lebesgue 控制收敛定理) 若 $|f_n| \leq g \in L_1, n = 1, 2, \dots$
且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ a.s., 则

$$E\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n | \mathcal{G}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(f_n | \mathcal{G}) \text{ a.s.}$$

- (1) 单调收敛定理: 若 $0 \leq f_n \uparrow f$ a.s., 则

$$f_n^* := E(f_n | \mathcal{G}) \in \mathcal{G}, \text{ 非负且 } \uparrow \text{ a.s..}$$

- 记 $\hat{f} = \uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*$, 则 $\hat{f} \in \mathcal{G}$.

- $\hat{f} = f^* := E(f | \mathcal{G}): \forall A \in \mathcal{G}$,

$$E\hat{f}\mathbf{I}_A = \uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} E f_n^* \mathbf{I}_A = \uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} E f_n \mathbf{I}_A = E f \mathbf{I}_A.$$

- (2) Fatou 引理. 若 $f_n \geq 0$ a.s., $\forall n$, 则

$$g_n := \inf_{m \geq n} f_m \uparrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n =: f \Rightarrow g_n^* \uparrow f^*.$$

- $g_n \leq f_n \Rightarrow g_n^* \leq f_n^* \Rightarrow f^* \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n^*$ a.s..

- (3) Lebesgue 控制收敛, 略.

定理 (定理4.5.4, 条件期望的线性)

设 f, g 是 r.v., f, fg 的积分存在, $g \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. 则

$$E(fg|\mathcal{G}) = gE(f|\mathcal{G}) \text{ a.s..}$$

- 设 $f, g \geq 0$. 对 g 用典型方法.
- 记 $f^* = E(f|\mathcal{G})$. 设 $g = \mathbf{I}_A$, 其中 $A \in \mathcal{G}$. ** 成立: $\mathbf{I}_A f^* \in \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned} E((\mathbf{I}_A f^*) \times \mathbf{I}_B) &= E(E(f|\mathcal{G})\mathbf{I}_{AB}) \\ &\stackrel{AB \in \mathcal{G}}{=} E f \mathbf{I}_{AB} = E((f\mathbf{I}_A) \times \mathbf{I}_B), \quad \forall B \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

- $g = \mathbf{I}_A \rightarrow g \geq 0$: 条件期望的线性、单调收敛定理.

- 去掉 $f, g \geq 0$ 的假设. 按 f, g 的符号划分 Ω ,

$$\Omega_1 = \{f, g \geq 0\}, \quad \Omega_2 = \{f, g < 0\}, \quad \Omega_3, \Omega_4.$$

- fg 的积分存在, 故 $(fg)_i = fg\mathbf{I}_{\Omega_i}$ 积分都存在且可和.
- 由条件期望的线性, $E(fg|\mathcal{G}) = \sum_i E((fg)_i|\mathcal{G})$.
- $E((fg)_i|\mathcal{G})$:

$$(fg)_1^* = (f^+g^+)^* = g^+(f^+)^*,$$

$$(fg)_3^* = (-f^+g^-)^* = -(f^+g^-)^* = -g^-(f^+)^*,$$

$$\Rightarrow (fg)^* = g^+(f^+)^* + g^-(f^-)^* - g^-(f^+)^* - g^+(f^-)^* = gf^*.$$

条件分布 $\mathcal{L}(\eta|\xi = x)$.

- 假设 ξ, η 为 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的两个随机元.

$$\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (X, \mathcal{F}_X, \mu_\xi), \mathcal{G} = \sigma(\xi) \subseteq \mathcal{F}.$$

$$\eta : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (Y, \mathcal{F}_Y, \mu_\eta).$$

- 设 $\zeta (= h(\xi))$ 为随机变量, 期望存在.

$$\text{记 } \zeta^* = \mathbf{E}(\zeta|\xi) := \mathbf{E}(\zeta|\mathcal{G}).$$

则 $\zeta^* \in \mathcal{G}$. 由定理1.5.4, $\exists \varphi : (X, \mathcal{F}_X) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 使得

$$\zeta^* = \varphi(\xi), \quad P\text{-a.s..}$$

- 定义4.5.3. 称满足 \star 的 $\varphi(\cdot)$ 为 ζ 关于 ξ 的给定值的条件期望. 记为 $\mathbf{E}(\zeta|\xi = \cdot)$.

- 定义4.5.4 若二元函数

$$\nu_x(B) = \nu(x, B), \quad x \in X, B \in \mathcal{F}_Y$$

满足:

- (1) $\forall x \in X, \nu_x$ 是 \mathcal{F}_Y 上的分布,
- (2) $\forall B \in \mathcal{F}_Y, \nu(\cdot, B) = P(\eta \in B | \xi = x), \mu_\xi$ -a.s.. 即

$$E\mathbf{I}_{\{\eta \in B\}} \mathbf{I}_{\{\xi \in A\}} = E\nu(\xi, B) \mathbf{I}_{\{\xi \in A\}},$$

则称它为 η 关于 ξ 的给定值的正则条件分布, 记为 $\mu_{\eta|\xi}(\cdot, \cdot)$.

- 注: 概率论中记为 $\mu_{\eta|\xi}(B|x)$.

- 假设 $\eta : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 是随机变量.
- 推论4.5.8. η 关于 ξ 的给定值的正则条件分布 $\mu_{\eta|\xi}(\cdot, \cdot)$ 存在, 且条件期望 = 对正则条件分布求期望: \forall Borel 函数 h ,

$$E(h(\eta)|\xi = x) = \int_{\mathbb{R}} h(y) \mu_{\eta|\xi}(x, dy) \quad \mu_{\xi}\text{-a.s.}$$

- 简记 $\nu_x(B) := \mu_{\eta|\xi}(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
- ★★的证明: 令 $\varphi(x) := \text{RHS}$. 即证 $\varphi(\xi) = E(h(\eta)|\xi)$. 需验证:
 - (1) $\varphi : (X, \mathcal{F}_X) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$; (2) $Eh(\eta)\mathbf{I}_{\{\xi \in A\}} = E\varphi(\xi)\mathbf{I}_{\{\xi \in A\}}$.
- ★★: 上式对 $h = \mathbf{I}_B$ 成立.
- ★★ \Rightarrow ★★, 即 $\mathbf{I}_B \rightarrow$ 任意 h , 典型方法 \checkmark .

- 推论4.5.8.中存在性的证明:

目标: $\nu_x(B) = \mu_{\eta|\xi}(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 存在.

- 方法: 找出对应的分布函数 $F_x(y) = \nu_x((-\infty, y])$.
- 定义4.5.2*. 若二元函数

$$F(x, y), \quad x \in X, y \in \mathbb{R}$$

满足

- $\forall x \in X$, $F(x, \cdot)$ 是分布函数,
- $\forall y \in \mathbb{R}$, $F(x, y) = P(\eta \leq y | \xi = x)$, μ_{ξ} -a.s.. 即

$$\mathbb{E} \mathbf{I}_{\{\eta \leq y\}} \mathbf{I}_{\{\xi \in A\}} = \mathbb{E} F(\xi, y) \mathbf{I}_{\{\xi \in A\}},$$

则称它为 η 关于 ξ 的给定值的正则条件分布函数, $F_{\eta|\xi}(\cdot, \cdot)$.

定理 (定理4.5.6*)

η 关于 ξ 的给定值的正则条件分布函数 $F_{\eta|\xi}(\cdot, \cdot)$ 存在.

- $F(x, \cdot)$ 是分布函数, 且 $F(x, y) = P(\eta \leq y | \xi = x)$, μ_ξ -a.s..
- $\forall r \in \mathbb{Q}$, 取 $\varphi_r : (X, \mathcal{F}_X) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ 使得

$$\varphi(x, r) := \varphi_r(x) = P(\eta \leq r | \xi = x), \quad \mu_\xi\text{-a.s..}$$

得到 $X \times \mathbb{Q}$ 上的函数 $\varphi(\cdot, \cdot)$.

- 回顾分布函数的三条性质: 单调、右连续、规范.
- 令 $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$, 则 $N \in \mathcal{F}_X$ 且 $\mu_\xi(N) = 0$. 其中,

$$N_1 := \{x \in X : \exists r_1, r_2 \in \mathbb{Q}, r_1 \leq r_2 \text{ 使得 } \varphi(x, r_1) > \varphi(x, r_2)\};$$

$$N_2 := \{x \in X : \exists r \in \mathbb{Q} \text{ 使得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x, r + \frac{1}{n}) \neq \varphi(x, r)\};$$

$$N_3 := \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x, n) \neq 1 \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x, -n) \neq 0\}.$$

- 固定 $x \notin N$. $\varphi(x, \cdot) : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足单调、右连续、规范.
- 固定 $x \notin N$.

$$F_{f|\mathcal{G}}(x, y) := \inf\{\varphi(x, r) : r \in \mathbb{Q}, r > y\}.$$

- $\forall x \in N$, $F_{f|\mathcal{G}}(x, y) := F(y)$, 为任取的一个分布函数.
- (1) 固定 $x \in X$. 往证 $F_{\eta|\xi}(x, \cdot)$ 是分布函数. \checkmark . (习题四、24)
- (2) 固定 $y \in \mathbb{R}$. $F_{\eta|\xi}(x, y) = \lim_{r \in \mathbb{Q}, r \downarrow y} \varphi(x, r)$, $\forall x \notin N$, 故

$$\begin{aligned} F_{\eta|\xi}(\cdot, y) &\stackrel{\mu_\xi^{-\text{a.s.}}}{=} \lim_{r \in \mathbb{Q}, r \downarrow y} \varphi(\cdot, r) = \lim_{r \in \mathbb{Q}, r \downarrow y} P(\eta \leq r | \xi) \\ &= \lim_{r \in \mathbb{Q}, r \downarrow y} \mathbf{E}(\mathbf{I}_{\{\eta \leq r\}} | \xi) = \mathbf{E}(\mathbf{I}_{\{\eta \leq y\}} | \xi) = P(\eta \leq y | \xi). \end{aligned}$$

- 注: 类似地, η 为随机向量即可.