一段往事

——追忆李忠老师

周蜀林

2021.12.21

八二年秋天，北大数学系招收了一百五十多个新生，我是其中之一。我们年级分成四个小班。大课全年级一起上，习题课小班分开上。一年级上学期和下学期，李忠老师给我们年级讲授《数学分析》的大课，张心明老师担任一班和二班的助教，同时兼任一班的班主任。田小林老师担任三班和四班的助教，同时兼任三班的班主任。吴宝科老师担任年级主任。后来成为李老师弟子的方丽萍同学在二班，崔贵珍同学在四班，而我在三班。想当年，李老师刚从瑞士Zurich 大学访学回国，是系里屈指可数的改革开放后出访归国的老师。他在国外学到了许多先进的数学思想，具备相当的国际视野。他那时只有四十六岁，风华正茂，才华横溢，意气风发，魅力十足。我们年级很幸运地由他这样的老师来执教。八五年春季学期，他又教过我们年级的《复变函数》。跟随李老师学过三个学期，我学到了许多分析的硬功夫。我后来从事偏微分方程的研究是因为我对我的分析功底很有信心，而我的分析基础得益于李老师的谆谆教诲。八十年代和九十年代数学系还在一院，每个教研室在系里只有一个办公室。李老师属于函数论教研室。他每周给我们上两次大课，每次大课两个小时。张老师和田老师在李老师的指导下每周给我们上一次习题课，每次两小时。另外，李老师每周还在教研室安排两小时的答疑。那个年代老师们教学极为认真，同学们学习也极为勤奋。李老师讲课重点突出，深入浅出，听他讲课是一种享受。他平易近人，和蔼可亲，深受同学们的爱戴。从八二年到现在已经三十九年，但有件事我印象很深，至今回想起来仍历历在目。

记得是深秋的某个下午，我去找教研室找李老师答疑。李老师刚给我们讲完这样的一个定理：闭区间上的连续函数一致连续。当时我们才接触了一点点实数理论和极限理论，这个定理的证明显得非常深奥和复杂。我找了一个简单函数$\sqrt{1-x^2}$(单位圆的一部分), 想根据定义直接证明$\sqrt{1-x^2}$在$[0,1]$上一致连续，即证明

对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$使得当$x_1,x_2\in[0,1]$且$|x_1-x_2|\le\delta$时，

$$\left|\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\right|<\varepsilon. \tag{1}$$

当时我的想法是证明

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\right| &= \left|\frac{x_2^2-x_1^2}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}}\right| \\ &\le \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

但是我遇到了大麻烦。虽然$|x_2-x_1|$可以选取很小，但当x_1,x_2接近1时$\sqrt{1-x_1^2}$和$\sqrt{1-x_2^2}$也可以很小。于是后面的不等式没法控制。我百思不得其解，只好去找李老师答疑。

见了李老师，他先让我讲一讲我的思路和困惑. 听完后，他轻描淡写地说：“你不是害怕x_1,x_2接近1吗？那么你先假设x_1,x_2在1附近，这时候$\sqrt{1-x_1^2}$, $\sqrt{1-x_2^2}$都接近0, 它们的差当然可以任意小。如果x_1离1 有一个正的距离，你写的不等式的分母就有正的下界，这时不等式就可控制了。”当时我茅塞顿开，恍然大悟。原来证明可以如此直截了当，如此简明扼要。用数学语言来讲，李老师的证明如下：

不妨设$x_1<x_2$. 由$\sqrt{1-x^2}$的连续性，存在$\delta_0\in(0,1)$, 使得当$x\in[1-\delta_0,1]$时，

$$\sqrt{1-x^2}<\varepsilon.$$

分两种情形讨论。
(1) $x_1\in[1-\delta_0,1]$.
此时显然

$$\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\le\sqrt{1-x_1^2}<\varepsilon.$$

(2) $x_1\in[0,1-\delta_0]$.
这时

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\right| &\le \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}} \\ &\le \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{1-(1-\delta_0)^2}} \\ &\le \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{\delta_0}}.\end{aligned}$$

取$\delta_1=\dfrac{\varepsilon\sqrt{\delta_0}}{2}$，则当$|x_1-x_2|\le\delta_1$时，

$$\left|\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\right|<\varepsilon.$$

综上，取$\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$, 当$|x_1-x_2|\le\delta$时，不等式(1)成立。

我原先的想法是奔着证明$\sqrt{1-x^2}$在$[0,1]$上是Lipschitz函数的路子去的，但一个可导的Lipschitz函数的导数一定有界，而$\sqrt{1-x^2}$的导数在1的附近无界。因此我的思路不大对头。而李老师的证明的巧妙之处在于将区间$[1-\delta_0,1]$ 刨掉，然后在区间$[0,1-\delta_0]$上考虑问题。显然在此区间上$\sqrt{1-x^2}$满足Lipschitz条件。李老师的证明大刀阔斧，简单粗放。对于刚入学的初学者来说，简单易懂。当时我觉得他的证明虽

好，但仍然不那么令人满意，然而我也想不出更好的办法。近日我又重新审视函数$\sqrt{1-x^2}$，终于找到一个简洁的证明。证明如下：

先证明不等式

$$\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\le\sqrt{2(x_2-x_1)},\quad 0\le x_1\le x_2\le 1, \tag{2}$$

即函数$\sqrt{1-x^2}$是$\frac{1}{2}$阶Hölder连续的，然后取$\delta=\frac{\varepsilon^2}{2}$, 则不等式(1)成立。

不等式(2)是如何发现的呢？将函数$\sqrt{1-x^2}$的x换成$1-x$，则得到函数$\sqrt{1-(1-x)^2}$。在0点附近，这个函数差不多就是$\sqrt{2x}$, 而$\sqrt{x}$是$\frac{1}{2}$阶Hölder连续的，即

$$\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\le\sqrt{x_2-x_1},\quad 0<x_1\le x_2. \tag{3}$$

于是猜测$\sqrt{1-x^2}$在$[0,1]$上$\frac{1}{2}$阶Hölder连续，即不等式(2). 至于不等式(2)，只需将第二项移项到右端，两边平方，即可证明。这个证明很漂亮，但要给初学者讲清楚证明思想，却不是那么容易。还是李老师的证明更直接，更容易被人接受。

这学期我在北大给一年级本科生教高等数学(B)，下学期我继续教高等数学(B)。现在北大的高等数学(B)选课的学生每学期有一千四百多人，用的教材是李忠老师和周建莹老师编的《高等数学》上、下册。李老师在北大学子中享有极高的知名度。《高等数学》这门课现在统一出题考试，半期考试时有一道题的证明与连续函数在闭区间上的一致连续性有关。我一看到一致连续这个概念，就会想起这段往事。本周五我要讲本学期最后一次高数课，打算给同学们讲讲这段故事，希望对他们有所启发。回顾这段往事，似乎又与已在天国的李老师进行了一次深入的交流，心里略感欣慰。知道李老师逝世的消息后，八二级的同学们纷纷在微信群里留言，回顾当年李老师执教我们时的往事。作为八二级在数学学院的留守人员，我谨代表八二级全体同学向李老师的家人表达我们对于李老师由衷的感激和缅怀之情！李老师永远活在我们的心中！

附记：我给同学们讲完这个故事。下课后一个同学告诉我, 利用不等式(3)，很容易证明(2)。证明如下：

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2} &\le \sqrt{1-x_1^2-(1-x_2^2)}\\ &\le \sqrt{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}\\ &\le \sqrt{2(x_2-x_1)}.\end{aligned}$$

我对同学们的反馈非常满意。在北大做一名教师会有满满的幸福感和成就感，因为讲台下坐着中国最好的学生。他们与你在思想上共鸣，在精神上飞跃。他们借你的肩膀走出北大，走出中国！我想李老师也同样会有这样的体会和感慨！